

MATHÉMATIQUES

DL n° 01

Bonjour à tous et toutes !

J'espère que vous passez de bonnes vacances. J'aimerais que vous vous remettiez dans le bain avant la rentrée, voilà donc un DL (pour devoir en temps libre, aussi appelé DM pour devoir maison) à cet effet.

Afin de m'assurer que vous avez joué le jeu de bien le travailler, il y aura une interro (devoir sur table) sur certaines questions de ce DM la semaine de la rentrée. Si vous bloquez sur certaines questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse aurelien_bosche@yahoo.fr.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Bon courage !

Exercice 1 :

1. Développer et réduire $(x + 3)(2x - 7)(3x - 2) - (2x + 6)(3x^2 - 7x + 7)$.

2. Factoriser et réduire :

(a) $(2x + 7)(x - 1) + (3x - 2)(x - 1)$

(b) $(2x + 1)(x - 1) - 3x + 3$.

(c) $4x^2 - 49$.

(d) $(4x - 16)(x - 2) - 3x^2 + 12x$.

(e) $4x^2 - 20x + 25$.

(f) $9x^2 - 12x + 4 + (2 - 3x)(4x + 1)$.

3. Résoudre les équations :

• $(x + 3)(2x - 7) - (x + 3)(x - 2) = x - 5$.

• $(x + 3)(3x + 7) = 2x^2 + 12x + 18 - x - 1$.

Exercice 2 : Simplifier au maximum les expressions suivantes

Niveau débutant : $\frac{5^{n+1}(7n + 1)}{7^{n+1}} - \frac{5^n(5n + 2)}{7^n}$.

Niveau confirmé : $\frac{11^{2n+1}(11n + 1)}{8^{n+1}} - \frac{121^{n+1}(2n - 5)}{2^{3n+4}}$.

Niveau expert : $\frac{22^{2n+3}(7n - 6)}{14^{2n+1}} - \frac{121^{n+1}(44n - 32)}{49^n}$.

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(3x - 1)(x + 2) < 9^2 - 1$

2. $\frac{4^2 + 20x + 25}{49^2 - 36} \geq \frac{4x + 10}{7x + 6}$.

Exercice 4 : Pierre a reçu un jeu de construction constitué de n cubes en bois de taille identique. Il les pose tous sur le sol, puis cherche à les ranger sous la forme d'un carré. Malheureusement, il lui manque 5 cubes pour compléter son carré avec sa première méthode. Il tente alors de faire un carré plus petit, mais se retrouve alors avec 14 cubes en trop. Déterminez le nombre de cubes dans son jeu de construction.

1 Récurrence

Je commence cette section par un exercice corrigé afin de fixer le type de rédaction souhaitée. J'aimerais que les exercices suivants soient rédigés de la même façon. Je rappelle que le symbole $\square$ signifie "pour tout" et le symbole $\square$ signifie "il existe". Ce sont des quantificateurs, nous reviendrons sur ce concept en début d'année.

Exercice 5 : Montrer que tout entier $n \geq 1$ vérifie $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1 + 2 + \dots + n = 1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ donc en particulier

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ce qui initialise la propriété (au rang 1).}$$

Hérédité : Supposons donné $n \in \mathbf{N}^*$ vérifiant $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons qu'alors

$$1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \text{ Or}$$

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{par hypothèse de récurrence})$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1)(n/2 + (n+1)) \\
&= (n+1)(n/2 + 1) \\
&= (n+1) \frac{n+2}{2} \\
&= (n+1) \frac{(n+1)+1}{2}
\end{aligned}$$

ce qui démontre que la propriété est héréditaire à partir du rang 1.

Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

À vous de jouer maintenant (en suivant la rédaction précédente)!

Exercice 6 : Montrer que tout entier $n \geq 1$ vérifie $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 7 : Montrer que tout entier $n \geq 1$ vérifie $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 8 : (Plus difficile) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

2 Ensemble de définition des fonctions

De la même façon, je vous donne le type de rédaction attendue en corrigeant la première question

1. Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

(a) $f_1: x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$.

(b) $f_2: x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}$.

(c) $f_3: x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$.

(d) $f_4: x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}}$.

(e) $f_5: x \mapsto \ln(\sin(x) + 2)$.

(f) $f_6: x \mapsto \ln(9x^2 - 25)$.

Correction de la première question

(a) $f_1 = g \circ h$ avec $g: x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbf{R}_+$ et $h: x \mapsto x^2 - 4$ définie sur $\mathbf{R}$.

Or :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) \in \mathbf{R}_+ \iff h(x) \geq 0$$

$$\iff x^2 - 4 \geq 0$$

$$\iff (x-2)(x+2) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[.$$

Ainsi f_1 est bien définie sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

À vous de faire la suite!

3 Système d'équations

Exercice 9 : Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ 2x - 2y = 24 \end{cases}.$$

$$2. \begin{cases} -3x + y + z + 3/4 = 0 \\ 2x + 3y - z + 3 = 1 \\ 2x + 5y + 2z = 3 \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}.$$

Exercice 10 : Un groupe de 15 amis décide d'aller passer ses vacances, en partant de Genève, à Rome. Pour y aller, huit d'entre eux préfèrent prendre l'avion et les autres, plus écolos, prennent le train. Collectivement, leur aller représente 374kg de CO₂ émis. Suivant l'exemple plus vertueux de leurs camarades, quatre de plus rentrent en train. Collectivement, le retour représente 202kg de CO₂ émis. Combien de CO₂ émet un trajet en avion (par passager)? En train?

Exercice 11 : Déterminer tous les triplets de réels $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie :

1. $P(-1) = 5, P(1) = 1$ et $P(2) = 2$;

2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.